Übungsaufgaben "Vektorrechnung"

1) Von einer Geraden g ist der Punkt $P_1 = (4; 2; 3)$ und der Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bekannt. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q = (4; 1; 1)$ von dieser Gerade.

Lösung:

$$g: \vec{r} = P_1 + \lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{d}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{14}} = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{14}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \underline{\underline{1{,}225}}$$

2) Die in der x,y-Ebene verlaufende Gerade g_1 schneidet die beiden Koordinatenachsen jeweils bei 3. Welchen Abstand besitzt diese Gerade von der z-Achse?

Lösung:

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{d}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{18}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{18}} = \underline{\underline{2{,}121}}$$

3) Zeigen Sie, dass sich die Gerade g_1 und g_2 in genau *einem* Punkt schneiden und bestimmen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel:

g_1 durch $P_1 = (4; 2; 8)$ und $P_2 = (3; 6; 11)$
g_2 durch $P_3 = (5; 8; 1)$ und $P_4 = (7; 10; 31)$

Lösung:

$$g_1 : \vec{r}_1 = P_1 + \lambda \cdot (P_2 - P_1) = \begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix} + \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix}3\\6\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}$$

$$g_2 : \vec{r}_2 = P_3 + \lambda \cdot (P_4 - P_3) = \begin{pmatrix}5\\8\\21\end{pmatrix} + \mu \cdot \left(\begin{pmatrix}7\\10\\31\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\8\\21\end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix}5\\8\\21\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\10\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2$$

$$\begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\8\\21\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\6\\13\end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix} - \mu \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\10\end{pmatrix}$$

$$1 = -\lambda - 2\mu \qquad (1)$$
$$6 = 4\lambda - 2\mu \qquad (2)$$
$$13 = 3\lambda - 10\mu \qquad (3)$$

$$1 = -\lambda - 2\mu$$
$$\underline{-(6 = 4\lambda - 2\mu)}$$
$$-5 = -5\lambda$$
$$\underline{\underline{\lambda = 1}}$$

$$1 = -1 - 2\mu$$
$$2 = -2\mu$$
$$\underline{\underline{\mu = -1}}$$

$$\left. \begin{array}{r} 1 = -1 + 2 \\ 6 = 4 + 2 \\ 13 = 3 + 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Gerade schneiden sich in einem Punkt}$$

$$\vec{r}_s = \begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\11\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S = (3; 6; 11)}}$$

$$\underline{\underline{\varphi}} = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\10\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\2\\10\end{pmatrix}\right|}\right) = \arccos\left(\frac{-2+8+30}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{18}}\right) = \underline{\underline{47{,}21°}}$$

4) Wie lautet die Vektorgleichung der Ebene *E*, die den Punkt P_1 enthält und parallel zu den Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ verläuft? Bestimmen Sie ferner einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene. Welche Punkte gehören zu den Parameterwertepaaren λ=1, μ=3 und λ=-2, μ=1?

a) $P_1 = (3; 5; 1)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

b) $P_1 = (6; 0; -3)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\8\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}$

Lösung:
a)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\1 & 1 & 1\\2 & 1 & 3\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

λ=1, μ=3:

$$\vec{r}_{Q1} = \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\9\\11\end{pmatrix}$$

$Q_1 = (10; 9; 11)$

λ=-2, μ=1:

$$\vec{r}_{Q2} = \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$$

$Q_2 = (3; 4; 2)$

b)

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\8\\-3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\8\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\2 & 8 & -3\\2 & 3 & -3\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\0\\-10\end{pmatrix}$$

λ=1, μ=3:

$$\vec{r}_{Q1}=\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}2\\8\\-3\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\17\\-15\end{pmatrix}\qquad Q_1 = (14; 17; -15)$$

λ=-2, μ=1:

$$\vec{r}_{Q2}=\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2\\8\\-3\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-13\\0\end{pmatrix}\qquad Q_2 = (4; -13; 0)$$

5) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene *E* durch die drei Punkte P_1, P_2 und P_3. Welche Punkte erhält man für die Parameterwertepaare λ=3, μ=-2 und λ=-2, μ=1?

a) P_1 = (3; 1; 0), P_2 = (-4; 1; 1), P_3 = (5; 9; 3)
b) P_1 = (5; 1; 2), P_2 = (-2; -1; -3), P_3 = (0; 5; 10)

Lösung:
a)

$$\vec{r}=P_1+\lambda\cdot(P_2-P_1)+\mu\cdot(P_3-P_1)$$

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\left(\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right)+\mu\cdot\left(\begin{pmatrix}5\\9\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-7\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\8\\3\end{pmatrix}$$

$\lambda=3, \mu=-2:$

$$\vec{r}_{Q1}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-7\\0\\1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2\\8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22\\-15\\-3\end{pmatrix}\qquad Q_1=(-22;-15;-3)$$

$\lambda=-2, \mu=1:$

$$\vec{r}_{Q2}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}-7\\0\\1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}2\\8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\9\\1\end{pmatrix}\qquad Q_2=(19;9;1)$$

b)

$$\vec{r} = P_1 + \lambda \cdot (P_2 - P_1) + \mu \cdot (P_3 - P_1)$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + \mu \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 3,\ \mu = -2:$

$$\vec{r}_{Q1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -13 \\ -29 \end{pmatrix} \qquad Q_1 = (-6; -13; -29)$$

$\lambda = -2, \mu = 1:$

$$\vec{r}_{Q2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = (14; 9; 20)$$

6) Liegen die vier Punkte $P_1 = (1; 1; 1)$, $P_2 = (3; 2; 0)$, $P_3 = (4; -1; 5)$ und $P_4 = (12; -4; 12)$ in einer Ebene?

Lösung:

$$E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4-1 \\ -1-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 12 &= 1 + 2\lambda + 3\mu \\ -4 &= 1 + \lambda - 2\mu \\ \underline{12} &\underline{= 1 - \lambda + 4\mu} \\ 8 &= 2 + 2\mu \\ 2\mu &= 6 \\ \underline{\underline{\mu}} &\underline{\underline{= 3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4 &= 1 + \lambda - 6 \\ \underline{\underline{\lambda}} &\underline{\underline{= 1}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 12 &= 1 + 2 + 9 \\ -4 &= 1 + 1 - 6 \\ 12 &= 1 - 1 + 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Die 4 Punkte liegen in einer Ebene}$$

7) Wie lautet die Gleichung einer Ebene *E*, die auf den drei Koordinatenachsen jeweils die *gleiche* Strecke *a* abschneidet und ferner den Punkt *Q* = (3; -4; 7) enthält?
Hinweis: Stellen Sie zunächst die Gleichung der Ebene durch die drei Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen in Abhängigkeit von der Strecke *a* auf.

Lösung:

$$E:\vec{r}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0-a\\a-0\\0-0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0-a\\0-0\\a-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-a\\a\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-a\\0\\a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\-4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-a\\a\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-a\\0\\a\end{pmatrix}$$

$$3=a-a\lambda-a\mu$$

$$-4=a\lambda$$

$$7=a\mu$$

$$\mu=\frac{7}{a}$$

$$\lambda=\frac{-4}{a}$$

$$3=a-a\frac{-4}{a}-a\frac{7}{a}=a+4-7$$

$$\underline{\underline{a=6}}$$

$$7=6\mu$$

$$\underline{\underline{\mu=\frac{7}{6}}}$$

$$-4=6\lambda$$

$$\underline{\underline{\lambda=-\frac{2}{3}}}$$

$$3=6+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(-6)+\frac{7}{6}\cdot(-6)=6+4-7=3$$

$$-4=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 6=-4$$

$$7=\frac{7}{6}\cdot 6=7$$

$$E:\vec{r}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$$

8) Eine Ebene *E* verläuft *senkrecht* zum Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und enthält den Punkt *A* = (5; 8; 10). Bestimmen Sie die Gleichung dieser Ebene. Berechnen Sie ferner die fehlende Koordinate des *auf* der Ebene gelegenen Punktes *B* = (2; *y*=?; 1).

Lösung:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{r} - \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$4 \cdot (x-5) + 3 \cdot (y-8) + 1 \cdot (z-10) = 0$$
$$4x - 20 + 3y - 24 + z - 10 = 0$$
$$4x + 3y + z = 54$$

B = (2; y; 1)

$$4 \cdot 2 + 3y + 1 = 54$$
$$3y = 45$$
$$\underline{\underline{y = 15}}$$

B = (2; 15; 1)

9) Welche Lage haben Gerade *g* und Ebene *E* zueinander? Bestimmen Sie gegebenenfalls Abstand, Schnittpunkt und Schnittwinkel.

a) *g* durch P_1 = (5; 1; 2) mit dem Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

E durch P_0 = (2; 1; 8) mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \cdot a = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E: \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$

c) *g* durch P_1 = (2; 0; 3) und P_2 = (5; 6; 18)

E durch P_3 = (1; -2; -2), P_4 = (0; -1; -1) und P_5 = (-1; 0; -1)

Lösung:

a)

$$\vec{n}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}=-3+3+2=2\neq 0 \Rightarrow \text{Gerade g und Ebene E schneiden sich}$$

$$\vec{r}_S=\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}+\frac{\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}\right)}{2}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}+\frac{\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\6\end{pmatrix}}{2}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}+\frac{3+6}{2}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}27\\9\\18\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}37\\11\\22\end{pmatrix}$$

$$S=(18{,}5;\,5{,}5;\,11)$$

$$\underline{\underline{\varphi}}=\arcsin\left(\frac{|2|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\right|}\right)=\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{14}}\right)=\underline{\underline{9{,}274^\circ}}$$

b)

$$\vec{n}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}=6-5-1=0\Rightarrow E\parallel g$$

$$\underline{\underline{d}}=\frac{\left|\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}5\\3\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}\right|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{11}}=\frac{|12-2-5|}{\sqrt{11}}=\frac{5}{\sqrt{11}}=\underline{\underline{1{,}51}}$$

c)

$$E:\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0-1\\-1+2\\-1+2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-1-1\\0+2\\-1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\-1 & 1 & 1\\-2 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\15\end{pmatrix}=-3-6=-9\neq 0\Rightarrow \text{Gerade g und Ebene E schneiden sich}$$

$$\vec{r}_S=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}+\frac{\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right)}{-9}\begin{pmatrix}3\\6\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}+\frac{\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\-5\end{pmatrix}}{-9}\begin{pmatrix}3\\6\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

S = (1; -2; -2)

$$\underline{\underline{\varphi}}=\arcsin\left(\frac{|-9|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\6\\15\end{pmatrix}\right|}\right)=\arcsin\left(\frac{9}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{270}}\right)=\underline{\underline{22{,}79°}}$$

10) Eine Gerade *g* durch die Punkte *A* = (1; 1; 1) und *B* = (5; 4; -3) verlaufe senkrecht zu einer Ebene *E*. Wie lautet die Gleichung dieser Ebene, wenn P_1 = (2;1; 5) ein Punkt dieser Ebene ist?

Lösung:

$$g:\vec{r}=A+\lambda\cdot(B-A)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-4\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\3\\-4\end{pmatrix}$$

$$E:\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_P)=0$$

$$\begin{pmatrix}4\\3\\-4\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{r}-\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}\right)=0$$

$$\begin{pmatrix}4\\3\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-5\end{pmatrix}=0$$

$$4\cdot(x-2)+3\cdot(y-1)-4\cdot(z-5)=0$$

11) Eine Ebene E_1 gehe durch den Punkt P_1 = (1; 2; 3), ihr Normalenvektor sei $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den *Parameter a* so, dass der Abstand des Punktes Q = (0; 2; 5) von dieser Ebene d=2 beträgt. Wie lautet die Gleichung der Parallelebene E_2 durch den Punkt A = (5; 1; -2)?

Lösung:

$$d = \frac{\left|\vec{n}\cdot\left(\vec{r}_Q - \vec{r}_1\right)\right|}{\left|\vec{n}\right|} = 2 = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}\right|}$$

$$2\cdot\sqrt{5+a^2} = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \left|-2+2a\right|$$

$$\sqrt{5+a^2} = \left|a-1\right|$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a=-2}}$$

$$A = (5;1;-2)$$

$$E_2 : \vec{n}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r}_A\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\left(r - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-5 \\ y-1 \\ z+2 \end{pmatrix}$$

$$= 2\cdot(x-5)+1\cdot(y-1)-2\cdot(z+2) = 0$$

12) Eine Ebene E enthält den Punkt P_0 = (2; 1; 8) und verläuft senkrecht zum Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass die Gerade $g : \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ zu dieser Ebene *parallel* ist. Wie groß ist der Abstand zwischen Gerade und Ebene?

Lösung:

$$E : \vec{n}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\left(\vec{r} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\vec{n}\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 8-6-2 = 0 \Rightarrow E \parallel g$$

$$\underline{\underline{d}} = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\-6\\1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\-6\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\-6\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-7\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{41}} = \frac{|6-12-7|}{\sqrt{41}} = \underline{\underline{2{,}03}}$$

13) Gegeben sind eine Gerade *g* und eine Ebene *E*:

$$g: \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$$E: \vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0) = 2\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)+1\cdot(z+3) = 0$$

Zeigen Sie, dass Gerade und Ebene sich *schneiden* und berechnen Sie den Schnittpunkt sowie den Schnittwinkel.

Lösung:

$$\vec{n}\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = 2+2-3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Gerade g und Ebene E schneiden sich}$$

$$\vec{r}_S = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\right)}{1}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + (-4-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-7\\-14\\21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-12\\21\end{pmatrix}$$

S = (-4; -12; 21)

$$\underline{\underline{\varphi}} = \arcsin\left(\frac{1}{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right|}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}\right) = \underline{\underline{6{,}26°}}$$

14) Zeigen Sie die Parallelität der beiden Ebenen E_1 und E_2 und berechnen Sie ihren Abstand:

E_1 durch $P_1 = (3; 5; 6)$ mit dem Normalenvektor $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$

E_2 durch P_2 = (1; 5; -2) mit dem Normalenvektor $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1 \parallel E_2$$

$$\underline{\underline{d}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{14}} = \frac{|2-16|}{\sqrt{14}} = \underline{\underline{3{,}74}}$$

15) Bestimmen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel der beiden Ebenen:

$$E_1 : \vec{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-5 \\ z-6 \end{pmatrix} = 0$$

$$E_2 : \vec{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-5 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$$

Lösung:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1 \text{ und } E_2 \text{ schneiden sich}$$

$$z(\vec{r}_0) = 0$$

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 - 2 \\ y_0 - 5 \\ 0 - 6 \end{pmatrix} = 0 = 3 \cdot (x_0 - 2) + 1 \cdot (y_0 - 5) + 2 \cdot (-6)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 - 1 \\ y_0 - 5 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = 0 = 2 \cdot (x_0 - 1) + 3 \cdot (-1)$$

$$2 \cdot x_0 - 2 - 3 = 0$$

$$2 \cdot x_0 = 5$$

$$\underline{\underline{x_0 = \frac{5}{2}}}$$

$$3 \cdot x_0 - 6 + y_0 - 5 - 12 = 0$$

$$3 \cdot \frac{5}{2} - 6 + y_0 - 5 - 12 = 0$$

$$\underline{\underline{y_0 = \frac{31}{2}}}$$

$$g_S : \vec{r} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 31/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varphi}} = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right|} \right) = \arccos\left(\frac{6+6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{13}} \right) = \underline{\underline{27{,}19°}}$$